Chapitre XVI

ONDES SONORES.

[...]Ma flûte, faite avec sept tiges de ciguë
Inégales que joint un peu de cire, aiguë
Ou grave, pleure, chante ou gémit à mon gré.[...]
José-Maria de HEREDIA

XVI-1 Mise en équation dans l'approximation acoustique.

XVI-1.a La situation de référence.

En 1672, Otto von Guericke prouvait que le son nécessite un milieu matériel (l'air en l'occurence) pour se propager en enfermant une sonnette sous une cloche dans laquelle il réalisa un vide poussé (pour l'époque).

Il s'agit donc pour nous de comprendre puis de mettre en équation la propagation d'une perturbation dans un fluide. Imaginons que quelqu'un ferme violemment une porte. La couche d'air située entre la porte et la couche d'air suivante, immobile par inertie, voit son volume diminuer donc sa pression augmenter ; elle va donc pousser la seconde couche restée à la pression initiale et se comporter vis à vis d'elle comme une porte qui claque. On comprend dès lors que de proche en proche la perturbation va se propager. On comprend aussi que les paramètres pertinents sont thermodynamiques : pression, volume (ou mieux masse volumique).

Considérons l'air au repos. Sa masse volumique est notée μ_0 et sa pression p_0. Un premier problème se pose : ces paramètres dépendent de l'altitude via la loi fondamentale de l'hydrostatique. Faut-il en tenir compte ?

Dans l'air on sait que la pression varie de façon significative sur une hauteur caractéristique H valant plusieurs kilomètres. Il suffit qu'une longueur caractéristique du phénomène acoustique soit petite devant H pour qu'on puisse considérer la pression comme uniforme et donc négliger la pesanteur. Pour un phénomène sinusoïdal, il suffira donc que sa longueur d'onde soit petite devant H.

Or, inutile d'en faire mystère, la vitesse du son dans l'air est voisin de 340 m/s [1] donc pour la fréquence où l'ouïe est la plus fine (1 kHz) la longueur d'onde est 0,34 m, notre approximation est légitime.

Pour l'eau où la pression double en 10 m et où la vitesse du son est plus élevée, on est à la limite.

XVI-1.b Paramétrage

En présence d'une perturbation, le champ de pression, de masse volumique et de vitesse dépendent du temps et de l'espace. Ecrivons les sous forme de la somme du champ de référence et d'un terme correctif, soit :

$$p(M,t) = p_0 + p_1(M,t)$$

$$\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t)$$

$$\overrightarrow{v}(M,t) = (\overrightarrow{v}_0 +)\overrightarrow{v}_1(M,t)$$

en n'oubliant pas que $\overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{0}$ car, dans la situation de référence, l'air est au repos.

Il est d'usage d'appeler p_1 et $\overrightarrow{v}_1$ respectivement *pression acoustique* et *vitesse acoustique* ; par contre μ_1 n'est habituellement baptisé.

L'approximation acoustique consiste à traiter p_1, μ_1 et $v_1 = \|\overrightarrow{v}_1\|$ comme des infi-niment petits et de négliger tous les termes d'ordre deux ou plus qui apparaîtront. Les négliger, oui mais par rapport à quoi ? Pour p_1 et μ_1, c'est clairement devant p_0 et μ_0, pour v_1, on verra le moment venu, même si l'on se doute que c'est devant la vitesse du son. On verra *a posteriori* que ces approximations sont largement légitimes dans l'air. Dans l'eau, on arrive par contre beaucoup plus vite aux limites du modèle.

XVI-1.c Les équations disponibles.

Conservation de la masse.

Elle se traduit, on le sait, par :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu\,\overrightarrow{v}) = 0$$

soit

$$\frac{\partial(\mu_0+\mu_1)}{\partial t} + \operatorname{div}((\mu_0+\mu_1)\,\overrightarrow{v}_1) = 0$$

soit, avec $\mu_0 = Cte$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \operatorname{div}(\overrightarrow{v}_1) + \operatorname{div}(\mu_1\,\overrightarrow{v}_1) = 0$$

[1]Rappelez-vous, dans votre prime jeunesse, on vous a expliqué comment mesurer la distance en kilomètres du point de chute de la foudre : compter le nombre de secondes entre l'éclair et le tonnerre et diviser par trois.

Le troisième terme fait intervenir deux grandeurs d'ordre un, il est d'ordre deux et on le néglige ; il reste donc :

$$\boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \operatorname{div}(\overrightarrow{v}_1) = 0} \qquad \text{(équation 1)}$$

Equation d'EULER

Aux fréquences habituelles, la période du phénomène est petite devant l'échelle de temps des phénomènes diffusifs comme la viscosité, l'écoulement peut donc être considéré comme parfait. On a donc aussi, en négligeant (cf *supra*) l'effet de la pesanteur :

$$\mu \left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla})\,\overrightarrow{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p$$

soit

$$(\mu_0 + \mu_1) \left(\frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} + (\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla})\,\overrightarrow{v}_1 \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(p_0 + p_1)$$

Le terme $(\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla})\,\overrightarrow{v}_1$ est d'ordre deux, on le néglige ; de même le produit $\mu_1 \frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t}$; enfin $\overrightarrow{\text{grad}}\, p_0$ est nul car p_0 est uniforme. Il reste donc :

$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1} \qquad \text{(équation 2)}$$

Pour que l'accélération convective soit négligeable devant l'accélération eulérienne, il faut pour une onde plane en $\omega\, t - k\, x$, qu'en ordre de grandeur $v.k.v$ soit négligeable devant $\omega\, v$, soit que v soit négligeable devant $\omega/k = V_\varphi$, c'est ce que nous avions pressenti plus haut.

Equation thermodynamique

La conduction thermique est un autre phénomène diffusif (que nous étudierons du reste plus tard) ; le négliger lui aussi revient à considérer les transformations du fluide comme adiabatiques. De plus les gradients de pression et de température vont rester faibles, on ne s'éloignera guère de l'équilibre et les transformations seront donc pratiquement réversibles. L'hypothèse isentropique est donc raisonnable. La donnée de la fonction entropie du fluide donne accès à sa *compressibilité isentropique* définie[2] par :

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_S$$

Dans une transformation isentropique, on a donc :

$$\mathrm{d}\mu = \mu\, \chi_S\, \mathrm{d}p$$

[2]Puisque $\mu = m/V$, donc que $\ln \mu = \ln m - \ln V$, en prenant la différentielle avec m constante, $\mathrm{d}\mu/\mu = -\mathrm{d}V/V$, ce qui justifie l'égalité entre les deux formulations ci-dessous.

Divisons par la durée dt de cette transformation élémentaire en notant que tacitement, le système est une masse élémentaire de fluide donnée, qu'on suit dans ses transformations mais aussi, par obligation, dans ses *déplacements* ; on est par essence dans un point de vue lagrangien et il apparaît donc une dérivée particulaire, d'où :

$$\frac{D\mu}{Dt} = \mu\,\chi_S\,\frac{Dp}{Dt}$$

soit

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla})\,\mu = \mu\,\chi_S\,\left(\frac{\partial p}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla})\,p\right)$$

soit

$$\frac{\partial(\mu_0+\mu_1)}{\partial t} + (\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla})\,(\mu_0+\mu_1) = (\mu_0+\mu_1)\,\chi_S\,\left(\frac{\partial(p_0+p_1)}{\partial t} + (\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla})\,(p_0+p_1)\right)$$

Faisons disparaître les dérivées des grandeurs constantes :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + (\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla})\,\mu_1 = (\mu_0+\mu_1)\,\chi_S\,\left(\frac{\partial p_1}{\partial t} + (\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla})\,p_1\right)$$

Les termes en $\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla}$ appliqués à p_1 et μ_1 sont d'ordre deux, ainsi que $\mu_1\,\chi_S\,\frac{\partial p_1}{\partial t}$; on les néglige, il reste donc :

$$\boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0\,\chi_S\,\frac{\partial p_1}{\partial t}} \qquad \text{(équation 3)}$$

XVI-1.d L'équation de propagation.

Si l'on reporte l'équation 3 dans l'équation 1 et qu'on simplifie par μ_0, on obtient avec l'équation 2 le système suivant :

$$\begin{cases} \chi_s\,\frac{\partial p_1}{\partial t} + \operatorname{div}\overrightarrow{v}_1 = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,p_1 + \mu_0\frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

qui fait apparaître mathématiquement le couplage mis en évidence physiquement plus haut. Physiquement, on voit qu'une compression (divergence de la vitesse non nulle) entraîne une variation de pression (dont la dérivée temporelle est donc non nulle) et de même un bilan non nul des forces de pression (gradient non nul) provoque une accélération.

On élimine ainsi la vitesse :

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\overrightarrow{v}_1 = \operatorname{div}\frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} \Rightarrow$$

$$-\chi_S\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu_0}\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,p_1) \Rightarrow$$

$$\mu_0\,\chi_S\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \Delta p_1$$

On reconnaît une équation de propagation tridimensionnelle où la célérité, appelée ici vitesse du son, est définie par :

$$V_{son}^2 = \frac{1}{\mu_0\,\chi_S}$$

Pour alléger l'exposé nous noterons $c^2 = 1/\mu_0\,\chi_S$ (avec un c italique, le c romain étant réservé à la lumière).

Cette célérité est indépendante de la pulsation ; il en résulte que vis à vis des ondes sonores, les fluides sont des milieux non dispersifs.

Comparaison avec les ondes longitudinales dans un solide.

Dans un solide, la célérité des ondes longitudinales a été calculée et on avait trouvé : $c^2 = E/\mu_0$ où le module d'Young est défini par :

$$\frac{F}{S} = E\,\frac{\Delta L}{L}$$

soit en introduisant la pression[3] et en mutipliant haut et bas par la section S au second membre :

$$-p = E\,\frac{\Delta(L\,S)}{L\,S} = E\,\frac{\Delta V}{V}$$

qu'on comparera à cette relation tirée de la définition de χ_S :

$$-\mathrm{d}p = \frac{1}{\chi_S}\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

Il y a donc analogie entre χ_S et $1/E$ et cette analogie dans la définition se retrouve dans la formule donnant la célérité des ondes.

Ordres de grandeur.

Pour un liquide, la compressiblité isentropique et la compressibilité isotherme sont quasiment confondues, elles ne dépendent quasiment pas ni de la pression, ni de la température, mais aucun modèle simple ne permet de calculer leur valeur, il s'agit donc essentiellement d'un résultat expérimental. Par rapport à un gaz, on sait bien qu'un liquide se comprime très difficilement, donc que sa compressibilité est bien plus faible, par contre sa masse volumique est de l'ordre de mille fois plus élevée ; ces deux phénomènes se compensent partiellement dans la formule définissant la célérité du son, on ne s'étonnera donc pas de trouver des valeurs du même ordre de grandeur entre vitesse du son dans les gaz et dans les liquides (et aussi dans les solides au vu de l'analogie fluides/solides vue ci-dessus).

Pour l'eau, on a $\mu_0 = 10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$ et $\chi_S = 5.10^{-10}\,\mathrm{Pa^{-1}}$, d'où $c = 1,4.10^3\mathrm{m.s^{-1}}$, à comparer avec les solides (de l'ordre de quelques $10^3\mathrm{m.s^{-1}}$ cf chapitre sur les ondes dans un solide) et l'air ($0,35.10^3\mathrm{m.s^{-1}}$ cf ci-dessous).

[3] F est comptée positivement vers l'extérieur et p vers l'intérieur ce qui explique le signe moins.

Pour un gaz, une évolution isentropique est gérée par la relation de LAPLACE $p\,V^{\gamma} = Cte$, soit $\ln p + \gamma \ln V = Cte$ d'où, en différentiant $\mathrm{d}p/p + \gamma\,\mathrm{d}V/V = 0$ et :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \frac{1}{\gamma p} \approx \frac{1}{\gamma p_0}$$

Par ailleurs l'équation d'état $p\,V = n\,R\,T = (m/M)\,R\,T$ entraîne $\mu_0 = m/V_0 = M\,p_0/R\,T_0$, d'où :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\chi_S}} = \sqrt{\frac{\gamma\,R\,T_0}{M}}$$

Pour l'air ($M = 29.10^{-3}$kg.mol^{-1} et $\gamma = 1,4$) à 300 K, on a $c = 347\,\mathrm{m.s}^{-1}$.

XVI-2 Ondes sonores planes progressives sinusoïdales.

XVI-2.a Structure longitudinale.

L'équation de d'ALEMBERT vérifiée par p_1 a des solutions planes progressives
sinusoïdales, soit en notation complexe :

$$\underline{p_1} = \underline{p_m}\,\exp \jmath\,\omega\,(t - x/c)$$

Déduisons-en $\overrightarrow{v}_1$ par l'une des équations de couplage, par exemple l'équation 2 qui, en notation complexe, donne :

$$\mu_0\,(\jmath\,\omega)\,\underline{\overrightarrow{v_1}} = -(-\jmath\,\overrightarrow{k}\,)\,\underline{p_1} = \jmath\,k\,\underline{p_1}\,\overrightarrow{e}_x$$

d'où :

$$\underline{\overrightarrow{v_1}} = \frac{k}{\mu_0\omega}\,\underline{p_1}\,\overrightarrow{e}_x = \frac{1}{\mu_0\,c}\,\underline{p_1}\,\overrightarrow{e}_x = \frac{1}{\mu_0\,c}\,\underline{p_m}\,\exp \jmath\,\omega\,(t - x/c)\,\overrightarrow{e}_x$$

ce qui montre clairement que la vitesse acoustique a la même direction que celle de propagation de l'onde : il s'agit donc d'une onde longitudinale. Dans un solide, au contraire, on peut avoir des ondes de déformation, soit longitudinales, soit transversales. Lors d'un tremblement de terre, les deux types d'ondes sont créées dans la croûte terrestre, mais seules les longitudinales peuvent se réfracter dans le *manteau* sous la croûte et s'y propager ; on en déduit que le manteau est liquide.

XVI-2.b Impédance acoustique.

Par ailleurs, si l'on définit l'amplitude complexe de la vitesse acoustique par :

$$\underline{\overrightarrow{v_1}} = \underline{v_m}\,\exp \jmath\,\omega\,(t - x/c)\,\overrightarrow{e}_x$$

alors :

$$\underline{v_m} = \frac{1}{\mu_0\,c}\,\underline{p_m}$$

Il y a donc proportionnalité entre vitesse et pression acoustique. Le rapport de proportionnalité est indépendant de la pulsation ; on en déduira par analyse de FOURIER que ce rapport reste valable pour toute onde plane progressive même non sinusoïdale et même non périodique.

Le rapport de proportionnalité est réel, ce qui prouve que pression et vitesse acoustiques sont en phase.

Par convention, on appelle *impédance acoustique* le rapport de l'amplitude complexe de la pression acoustique à celle de la vitesse acoustique, soit :

$$Z = \frac{\underline{p_m}}{\underline{v_m}} = \mu_0\, c$$

d'où l'unité de Z : le kg.m^{-2}.s^{-1}

Grâce à l'expression de c, on tire trois formulations possibles pour Z :

$$Z = \mu_0\, c = \frac{1}{\chi_S\, c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_S}}$$

Impédance de l'onde inverse.

Pour une onde en $\exp \jmath\, \omega\, (t + x/c)$ pour laquelle $\overrightarrow{k} = -k\, \overrightarrow{e}_x = -(\omega/c)\, \overrightarrow{e}_x$, les mêmes calculs conduisent à un résultat opposé, qu'on peut noter $Z_- = -Z_+ = -\sqrt{\mu_0/\chi_S}$.

Ordres de grandeur.

Le point le plus important est que les variations de μ_0 et de χ_S quand on compare liquide et gaz, au contraire de la célérité où les effets se compensent, ont ici des effets qui s'ajoutent ; l'impédance acoustique d'un liquide et celle d'un gaz auront des ordres de grandeur fondamentalement différents.

Avec les valeurs numériques données plus haut, on trouve, pour l'eau, $Z = 1,4.10^6$ kg.m^{-2}.s^{-1} et, pour l'air à 300 K, $Z = 4,0.10^2$ kg.m^{-2}.s^{-1}

XVI-3 Aspects énergétiques.

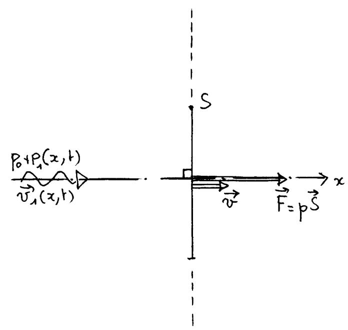
XVI-3.a Densité volumique d'énergie et densité de courant énergétique.

Puissance surfacique transportée.

Sur la figure, considérons à l'abscisse x une surface S imaginaire orthogonale à la direction de propagation d'une onde plane progressive sinusoïdale. On peut considérer qu'à l'instant t l'air à gauche de S exerce sur l'air à droite une force de pression $\overrightarrow{F} = p(x,t)\, S\, \overrightarrow{e}_x = (p_0 + p_1(x,t))\, S\, \overrightarrow{e}_x$

Comme la vitesse est $v_1(x,t)\, \overrightarrow{e}_x$, la puissance exercée par l'air à gauche sur l'air à droite est :

$$\mathcal{P} = (p_0 + p_1(x,t))\, S\, \overrightarrow{e}_x . v_1(x,t)\, \overrightarrow{e}_x = (p_0 + p_1(x,t))\, v_1(x,t)\, \overrightarrow{e}_x . S\, \overrightarrow{e}_x$$



qu'on peut écrire $\overrightarrow{\Pi}.\overrightarrow{S}$ avec $\overrightarrow{\Pi} = (p_0 + p_1(x,t))\, v_1(x,t)\, \overrightarrow{e}_x$

On y reconnaît le formalisme de tout vecteur densité de courant (permettant de calculer l'intensité en électrocinétique, le débit massique en mécanique des fluides, la puissance transportée en électromagnétisme).

Ici, la densité de courant énergétique se compose de deux termes, le premier en $p_0.v_1$ a une moyenne nulle en régime sinusoïdal puisque p_0 est une constante, nous conviendrons donc de ne pas en tenir compte ; on définit donc le vecteur densité de courant énergétique par le second terme qui est quadratique et nécessitera donc un retour au notations réelles. Compte tenu des résultats précédents, pour $p_1(x,t) = p_m \cos[\omega(t-x/c)]$, on a $\overrightarrow{v}(x,t) = (p_m/Z)\cos[\omega(t-x/c)]\, \overrightarrow{e}_x$ et donc :

$$\overrightarrow{\Pi}(x,t) = \Pi(x,t)\, \overrightarrow{e}_x = p_1(x,t).\overrightarrow{v}(x,t) = \frac{p_m^2}{Z} \cos^2[\omega(t-x/c)]\, \overrightarrow{e}_x$$

Cela dit, le résultat pertinent en est la moyenne temporelle, soit, abstraction faite du vecteur unitaire :

$$< \Pi >= \frac{p_m^2}{2\,Z}$$

Densité volumique d'énergie.

Tentons de mettre en évidence une relation de conservation de la forme $\operatorname{div}\overrightarrow{\Pi} + (\partial u/\partial t) = 0$ comme pour la conservation de la charge, de la masse, de l'énergie électromagnétique. On part de :

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\Pi} = \operatorname{div}(p_1\, \overrightarrow{v}_1) = p_1 \operatorname{div}\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p_1.\overrightarrow{v}_1$$

Reportons-y $\operatorname{div}\overrightarrow{v}_1 = -\chi_S\,(\partial p_1/\partial t)$ et $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p_1 = -\mu_0\,(\partial \overrightarrow{v}_1/\partial t)$ tirés des équations de couplage vues plus haut :

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\Pi} = -\chi_S\, p_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \mu_0\, \overrightarrow{v}_1.\frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\chi_S\, p_1^2 + \frac{1}{2}\mu_0\, v_1^2\right)$$

qui est bien de la forme $\operatorname{div}\overrightarrow{\Pi} + (\partial u/\partial t) = 0$ avec :

$$u = \frac{1}{2}\chi_S\, p_1^2 + \frac{1}{2}\mu_0\, v_1^2$$

qui doit donc être considéré comme une densité voumique d'énergie. Cela dit, il saute aux yeux que le second terme est une densité volumique d'énergie cinétique et qu'on aurait pu le calculer directement. Le premier terme ne peut être justifié que par un raisonnement thermodynamique extrêmement délicat ; comme nous y convie le programme, nous admettrons qu'il s'agit d'une densité volumique d'énergie potentielle liée aux forces de pression.

Avec l'onde ci-dessus on a :

$$u_{pot} = \frac{1}{2}\chi_S\, p_1^2 = \frac{1}{2}\chi_S\, p_m^2\ \cos^2[\omega(t - x/c)]$$

$$u_{cin} = \frac{1}{2}\mu_0\, v_1^2 = \frac{1}{2}\mu_0\, v_m^2\ \cos^2[\omega(t - x/c)] = \frac{1}{2\,Z^2}\mu_0\, p_m^2\ \cos^2[\omega(t - x/c)]$$

or on a $Z = \sqrt{\mu_0/\chi_S}$ et l'on montre l'équipartition entre les deux formes d'énergie :

$$u_{pot} = u_{cin} = \frac{1}{2}\chi_S\, p_m^2\ \cos^2[\omega(t - x/c)]$$

$$u = u_{pot} + u_{cin} = \chi_S\, p_m^2\ \cos^2[\omega(t - x/c)]$$

$$< u >= \frac{1}{2}\chi_S\, p_m^2$$

Enfin, comme en électromagnétisme, on peut définir la vitesse de l'énergie par
$\overrightarrow{\Pi} = u\,\overrightarrow{V}_E$. En reportant les résultats précédents, on retrouve comme on s'y attend $V_E = (1/Z\,\chi_S)\,\overrightarrow{e}_x = c\,\overrightarrow{e}_x$ (car on a vu que $Z = 1/\chi_S\, c$).

XVI-3.b Intensité sonore et ordres de grandeur.

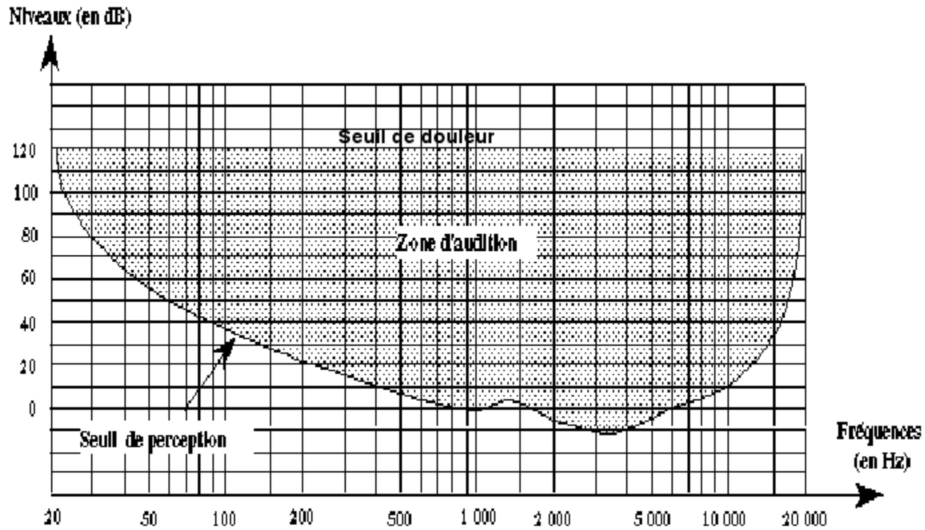
Définition.

A la fréquence à laquelle est est la plus sensible (environ 4 kHz) l'oreille humaine est capable de percevoir un son dont la densité de courant énergétique vaut $10^{-12}\,\mathrm{W.m^{-2}}$ et la perception devient douloureuse à $1\,\mathrm{W.m^{-2}}$. Vu l'énorme différence d'ordre de grandeur entre ces deux extrêmes, une échelle logarithmique s'impose ; du reste des mesures physico-physiologiques ont montré que l'oreille humaine a une réponse logarithmique. On prend donc comme référence le seuil de perception $\Pi_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W.m^{-2}}$ et à une densité de courant énergétique, on associe une intensité sonore en décibels définie par :

$$I_{dB} = 10\ \log_{10}\left(\frac{< \Pi >}{\Pi_0}\right)$$

Ci-dessous une courbe intensité-fréquence (en échelle logarithmique elle aussi) de l'oreille humaine avec seuil de perception pour un individu jeune et seuil de douleur (forcément imprécis).

A titre indicatif, ci-dessous un tableau donnant l'intensité de sons caractéristiques :



seuil de perception	0 dB
pièce calme	30 dB
conversation	50 dB
rue animée	80 dB
fortissimo d'orchestre	110 dB
marteau-piqueur à 1 m	110 dB
seuil de douleur	120 dB

Ordres de grandeurs.

On a vu que pour l'air à 300K, $c = 3,5.10^2\,\mathrm{m.s^{-1}}$ et $Z = 4,0.10^2\,\mathrm{kg.m^{-2}.s^{-1}}$.

Au seuil de perception, on a $<\Pi>= 10^{-12}\,\mathrm{W.m^{-2}}$;

de $<\Pi>= p_m^2/2\,Z$, on tire $p_m = 2,8.10^{-5}\,\mathrm{Pa}$;

de $v_m = p_m/Z$, on tire $v_m = 7,1.10^{-8}\,\mathrm{m.s^{-1}}$;

et puisque la vitesse est la dérivée du mouvement, on en déduit une amplitude de $\xi_m = v_m/\omega$, soit à 4 kHz, $\xi_m = 2,8.10^{-12}\,\mathrm{m}$ (non, il n'y a pas d'erreur, l'oreille humaine est sensible à ce point).

A 120 dB, seuil de la douleur on aura de la même façon $p_m = 2,8.10^1\,\mathrm{Pa}$, $v_m = 7,1.10^{-2}\,\mathrm{m.s^{-1}}$ et à la même fréquence $\xi_m = 2,8.10^{-6}\,\mathrm{m}$

XVI-3.c Contrôle des approximations

Même au seuil de douleur $p_m = 28\,\mathrm{Pa} \ll p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$. L'intégration de l'équation 3 page 4 donne, sachant que $p_1 = 0$ correspond à la situation de référence donc à $\mu_1 = 0$, $\mu_1 = \mu_0\,\chi_S\,p_1$ et comme pour un gaz $\chi_S = 1/\gamma\,p_0$, on en tire :

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{1}{\gamma}\frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{1,4}.28.10^{-5} = 2.10^{-4}$$

Enfin, dans les mêmes conditions $v_m = 7,1.10^{-2}\,\mathrm{m.s^{-1}} \ll c = 347\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

Tout est donc pour le mieux dans le meilleur des mondes.[4]

XVI-4 Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux.

XVI-4.a Coefficients de réflexion et de transmission.

Exposé de la problématique.

Considérons une interface plane infinie (choisie comme plan Oyz) séparant d'un côté (côté $x < 0$) un fluide 1 d'impédance acoustique Z_1 et de vitesse du son c_1 et de l'autre (côté $x > 0$) un fluide 2 d'impédance acoustique Z_2 et de vitesse du son c_2. Soit une onde acoustique plane progressive sinusoïdale, dite onde incidente, émise par un générateur éloigné et se propageant, dans le milieu 1, dans le sens positif de Ox et caractérisée par sa pression et sa vitesse acoustique :

$$p_i = p_{im}\,\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right]$$

$$\overrightarrow{v}_i = v_{im}\,\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right]\,\overrightarrow{e}_x = \frac{p_{im}}{Z_1}\,\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right]\,\overrightarrow{e}_x$$

Arrivée en $x = 0$, elle met en mouvement les premières couches du milieu 2 qui, à leur tour, agisssent à la fois sur les autres couches du milieu 2 et les dernières couches du milieu 1 et génèrent ainsi une onde réfléchie et une onde transmise. L'onde réfléchie a la structure suivante (attention au changement de signe de l'impédance !) :

$$p_r = p_{rm}\,\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{c_1}\right)\right]$$

$$\overrightarrow{v}_r = v_{rm}\,\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{c_1}\right)\right]\,(-\overrightarrow{e}_x) = -\frac{p_{rm}}{Z_1}\,\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{c_1}\right)\right]\,\overrightarrow{e}_x$$

et l'onde transmise a pour structure :

$$p_t = p_{tm}\,\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_2}\right)\right]$$

$$\overrightarrow{v}_t = v_{tm}\,\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_2}\right)\right]\,\overrightarrow{e}_x = \frac{p_{tm}}{Z_2}\,\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_2}\right)\right]\,\overrightarrow{e}_x$$

où p_{rm} et p_{tm} sont les seules grandeurs à calculer.

On reconnaît bien sûr la même problématique que la réflexion et la transmission d'ondes électromagnétiques et bien des choses qui ont été dites dans le chapitre 10 restent valables ici. Par exemple, on pourrait aisément établir des lois de SNELL-DESCARTES pour les ondes sonores, mais ce n'est pas l'objet du programme. Bien sûr aussi, les mêmes méthodes seront utilisées, à savoir partir des continuités à l'interface entre les deux milieux.

[4] comme disait Pangloss.

Continuité de la vitesse acoustique.

Montrons que la vitesse acoustique est continue. En fait, l'interface est par définition la surface où se cotoient les dernières molécules du milieu 1 et les premières du milieu 2, molécules qui collent à l'interface et ont donc la même vitesse que celle-ci, donc la même vitesse les unes que les autres. La suite est plus subtile qu'il n'y paraît, car l'interface vibre à la même pulsation que l'onde, son abscisse est de la forme $\xi(t) = \xi_m \cos(\omega\, t)$ et la continuité doit s'écrire rigoureusement :

$$\lim_{x \to \xi(t)^-} v_1(x,t) = \lim_{x \to \xi(t)^+} v_2(x,t)$$

soit

$$v_1(\xi(t),t) = v_2(\xi(t),t)$$

Heureusement, on a vu que les amplitudes de mouvements sonores sont très petites et l'on pourra dans v_1 et v_2, confondre $\xi(t)$ et 0, il suffit pour cela que ξ_m soit petit devant la longueur d'onde du phénomène ; dans l'air la plus petite longueur d'onde audible correspond à la plus grande fréquence audible (20 kHz) et vaut donc $\lambda_{min} = c/f_{max} = 347/20\,000 \approx 0,02\,\mathrm{m} = 2$ cm, c'est bien plus que les amplitudes mises en évidence plus haut. Donc :

$$v_1(0,t) = v_2(0,t)$$

où, dans le milieu 1 se superposent l'onde incidente et l'onde réfléchie et dans le milieu 2 seule se propage l'onde transmise, donc :

$$v_i(0,t) + v_r(0,t) = v_t(0,t)$$

soit successivement

$$v_{im}\, \cos(\omega\, t) + v_{rm}\, \cos(\omega\, t) = v_{tm}\, \cos(\omega\, t)$$

$$v_{im} + v_{rm} = v_{tm}$$
$$\frac{p_{im}}{Z_1} - \frac{p_{rm}}{Z_1} = \frac{p_{tm}}{Z_2}$$

Continuité de la pression acoustique.

Montrons maintenant que la pression est continue. Considérons un système cylindrique de section S de génératrices selon Ox entre $x = \xi(t) - \varepsilon \approx -\varepsilon$ et $x = \xi(t) + \varepsilon \approx \varepsilon$ de masse δm ; un bilan de quantité de mouvement projeté sur Ox donne (on rappelle qu'on néglige la pesanteur dans tout cet exposé) :

$$p_1(-\varepsilon,t)\, S - p_2(\varepsilon,t)\, S = \delta m\, \ddot{\xi}(t)$$

Faisons tendre ε vers 0 donc δm aussi, alors :

$$p_1(0,t) = p_2(0,t)$$

soit successivement

$$p_i(0,t) + p_r(0,t) = p_t(0,t)$$

$$p_{im}\, \cos(\omega\, t) + p_{rm}\, \cos(\omega\, t) = p_{tm}\, \cos(\omega\, t)$$

$$p_{im} + p_{rm} = p_{tm}$$

Calcul des coefficients de réflexion et de transmission.

On a donc à résoudre, en fonction de p_{im} et des constantes Z_1 etZ_2 des milieux, le système suivant en p_{rm} et p_{tm} :

$$\begin{cases} p_{im} + p_{rm} = p_{tm} \\ \frac{p_{im}}{Z_1} - \frac{p_{rm}}{Z_1} = \frac{p_{tm}}{Z_2} \end{cases}$$

Quelques lignes de calcul élémentaires plus loin, on en tire :

$$p_{rm} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\, p_{im} \quad \text{et} \quad p_{tm} = \frac{2\, Z_2}{Z_2 + Z_1}\, p_{im}$$

ce qui permet de définir les coefficients de réflexion et de transmission *relatifs à la pression* :

$$r_p = \frac{p_{rm}}{p_{im}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \text{ et } t_p = \frac{p_{tm}}{p_{im}} = \frac{2\, Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

Il est important de préciser qu'il s'agit de coefficients relatifs a la pression, car on peut (et on va) définir et calculer des coefficients relatifs à la vitesse :

$$r_v = \frac{v_{rm}}{v_{im}} = \frac{-p_{rm}/Z_1}{p_{im}/Z_1} = -r_p = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$t_v = \frac{v_{tm}}{v_{im}} = \frac{p_{tm}/Z_2}{p_{im}/Z_1} = \frac{Z_1}{Z_2} t_p = \frac{2\, Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

XVI-4.b Coefficients énergétiques.

L'onde incidente, si elle était seule, transporterait $\Pi_i \overrightarrow{e}_x$ avec $\Pi_i = p_i\, v_i$, comme on l'a vu plus haut. De même l'onde réfléchie, seule, transporterait $\Pi_r \overrightarrow{e}_x$ avec $\Pi_r = p_r\, v_r$, et l'onde transmise transporte $\Pi_t \overrightarrow{e}_x$ avec $\Pi_t = p_t\, v_t$. On constaterait aisément que Π_r est négatif car $v_r = -p_r/Z_1$, ce signe signifiant que l'énergie est renvoyée vers l'arrière. On définit des coefficients de réflexion et de transmission faisant abstraction du sens de propagation donc du signe par :

$$R = \frac{|\Pi_r|}{\Pi_i} = \frac{p_r}{p_i} \frac{|v_r|}{v_i} = r_p\, |r_v| = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

$$T = \frac{\Pi_t}{\Pi_i} = \frac{p_t}{p_i} \frac{v_t}{v_i} = t_p\, t_v = \frac{4\, Z_2\, Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

Comme en électromagnétisme, la conservation de l'énergie est assurée par $R + T = 1$.

Du reste, on aura noté la grande analogie formelle entre ces formules et celles de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un dioptre.

Ordres de grandeurs.

Le point le plus important à noter est, qu'au contraire de l'électromagnétisme où les indices ne s'éloignent pas beaucoup de l'unité, les impédances acoustiques peuvent être notablement différentes surtout entre un gaz et un liquide. Par exemple on a pour l'air $Z_1 = 4,0.10^2\,\mathrm{kg.m^{-2}.s^{-1}}$ et pour l'eau $Z_2 = 1,4.10^6\,\mathrm{kg.m^{-2}.s^{-1}}$, ce qui donne pour T :

$$T = \frac{4.4,0.10^2.1,4.10^6}{(4,0.10^2 + 1,4.10^6)^2} \approx \frac{4.4,0.10^2.1,4.10^6}{(1,4.10^6)^2} = \frac{4.4,0.10^2}{1,4.10^6} = 1,14.10^{-3}$$

et donc

$$R = 1 - T = 0,999$$

Sur l'interface air-eau, la quasi-totalité de l'énergie est renvoyée ; en échelle logarithmique le passage air-eau s'accompagne d'un affaiblissement de $10 \log T = -29\,\mathrm{dB}$. Quand on plonge la tête sous l'eau[5], les sons venant de l'extérieur semblent fortement étouffés.

XVI-4.c Complément : tuyaux sonores.

Bien que ce ne soit pas *explicitement* au programme, tout est en place pour que nous puissions étudier des ondes sonores planes stationnaires. Il serait dommage de ne pas en profiter pour parler, fût-ce sommairement de la physique des instruments de musique à vent. Il s'agit de tuyaux en bois ou en métal dans lesquels le souffle de l'instrumentiste (ou d'un dispositif pneumatique dans le cas de l'orgue) entretient une onde stationnaire. Pour le tuyau, on distingue les cas des tuyaux cylindriques (flûte traversière, clarinette, etc.) ou coniques (haubois, saxophone, etc.) ; on parle de *perce* cylindrique ou conique. Pour l'entretien de l'onde stationnaire, il y a deux méthodes :

- le biseau : l'air est dirigé par un canal (flûte à bec) ou les lèvres (flûte traversière) vers un biseau autour duquel est généré un écoulement turbulent ; il s'en détache régulièrement des tourbillons qui injectent l'énergie suffisante à l'entretien de l'onde stationnaire.
- l'anche : on souffle entre deux roseaux (anche double comme le hautbois et le basson), ou entre un roseau et un support fixe (anche simple comme la clarinette et le saxophone), voire entre ses lèvres pincées (comme la trompette, le trombone et le cor). Le principe est le suivant l'air canalisé entre les deux parties de l'anche crée une dépression par effet Venturi qui les aspire l'une vers l'autre et ferme le canal. L'effet cesse donc et par élasticité l'anche retrouve sa forme initiale et rouvre le canal ; il s'ensuit la vibration qui entretient l'onde stationnaire.

Signalons enfin le rôle du pavillon : c'est un adaptateur d'impédance qui permet d'augmenter la puissance de l'onde sonore qui s'échappe de l'instrument.

Nous n'étudierons ici qu'un tuyau cylindrique d'axe Ox. L'hypothèse d'un fluide parfait permet de négliger l'épaisseur de la couche limite à la périphérie du tuyau et donc de considérer la vitesse et la pression comme homogènes dans une section d'abscisse donnée ; le modèle de l'onde plane convient donc.

[5] drôle d'idée !

La pression acoustique vérifie l'équation de d'ALEMBERT dont on connaît les solutions stationnaires ; on peut donc écrire :

$$p_1(x,t) = p_m \sin(\omega\, t + \varphi)\, \sin(\omega\, x/c + \psi)$$

L'équation 2 page 3 donne accès à la vitesse acoustique ; on a successivement :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p_1 = \frac{\omega}{c}\, p_m \sin(\omega\, t + \varphi)\, \cos(\omega\, x/c + \psi)\, \overrightarrow{e}_x$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} = -\frac{\omega}{\mu_0 c}\, p_m \sin(\omega\, t + \varphi)\, \cos(\omega\, x/c + \psi)\, \overrightarrow{e}_x$$

$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{p_m}{\mu_0 c} \cos(\omega\, t+\varphi)\, \cos(\omega\, x/c+\psi)\, \overrightarrow{e}_x = \frac{p_m}{Z} \cos(\omega\, t+\varphi)\, \cos(\omega\, x/c+\psi)\, \overrightarrow{e}_x$$

On remarque, qu'au contraire d'une onde progressive, pression et vitesse sont en quadrature dans le temps et dans l'espace.

Reste à exploiter les conditions aux limites.

Si l'une des extrémités du tuyau est fermée (comme les *bourdons* de l'orgue), il y a forcément un nœud de vitesse (puisque le mouvement est impossible) donc un ventre de pression. L'expérience prouve qu'une embouchure à anche se comporte comme une extrémité fermée.

Par contre à une extrémité ouverte, l'expérience prouve qu'on a un nœud de pression donc un ventre de vitesse ; l'explication théorique est délicate et hors programme. Retenons que l'air extérieur impose sa pression comme pression limite du tuyau, ce qui entraîne une surpression nulle. L'expérience prouve qu'une embouchure à biseau se comporte comme une extrémité ouverte.

Pour un tuyau de longueur L ouvert à ses deux extémités et puisqu'entre deux nœuds successifs de la même grandeur physique, il y a une demi-longueur d'onde, les longueurs d'ondes possibles sont telles que :

$$L = p\,\frac{\lambda_p}{2} = p\,\frac{c\,T_p}{2} = p\,\frac{c}{2 f_p} \qquad p \in N$$

d'où une fréquences fondamentale $f_1 = \dfrac{c}{2L}$ et des harmoniques $f_p = p\, f_1$. A titre d'exemple, pour le fondamental, on arrive aisément à :

$$p_1(x,t) = p_m\, sin\left(\pi\,\frac{x}{L}\right)\, sin\left(\pi\,\frac{c\,t}{L} + \varphi\right)$$

$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{p_m}{Z}\, cos\left(\pi\,\frac{x}{L}\right)\, cos\left(\pi\,\frac{c\,t}{L} + \varphi\right)\, \overrightarrow{e}_x$$

Pour un tuyau ouvert en $x = 0$ et fermé en $x = L$, on aurait de même :

$$L = (2\,p+1)\,\frac{\lambda_p}{4} = (2\,p+1)\,\frac{c\,T_p}{4} = (2\,p+1)\,\frac{c}{4 f_p} \qquad p \in N$$

d'où une fréquences fondamentale $f_0 = \dfrac{c}{4L}$ et des harmoniques $f_p = (2\,p+1)\, f_0$. A titre d'exemple, pour le fondamental, on arrive aisément à :

$$p_1(x,t) = p_m\, sin\left(\pi\,\frac{x}{2\,L}\right)\, sin\left(\pi\,\frac{c\,t}{2\,L} + \varphi\right)$$

$$\vec{v}_1 = \frac{p_m}{Z} \, cos\left(\pi \, \frac{x}{2\,L}\right) \, cos\left(\pi \, \frac{c\,t}{2\,L} + \varphi\right) \, \vec{e}_x$$

Lorsqu'on souffle de façon relachée dans un instrument, on excite le fondamental. Au vu de ce qui précède, à longueur égale, une clarinette joue une octave en-dessous d'une flûte.

Si l'on débouche les trous un à un à partir du bout de l'instrument, cela revient à en raccourcir la longueur utile donc à augmenter la fréquence, donc à produire des notes plus hautes. Remarquons en conséquence que, tous trous bouchés, on joue la note la plus basse que puisse produire l'instrument.

Si l'on souffle de façon plus tendue dans l'instrument on excite le premier harmonique et l'on facilite la chose en débouchant sous l'instrument un trou pour provoquer un nœud de pression au bon endroit. Pour un instrument «ouvert-ouvert», on passe à $f_2 = 2\,f_1$, c'est à dire à l'octave ; on dit que l'instrument octavie et le trou d'octave est à mi-longueur. Pour un instrument «ouvert-fermé», on passe à $f_1 = 3\,f_0$, c'est à dire à la douzième (l'octave de la quinte) ; on dit (improprement) que l'instrument quintoie et le trou de douzième est au tiers de la longueur ; c'est ce qui donne sa sonorité nasillarde à la clarinette. Signalons, pour compliquer le tout, qu'un instrument «ouvert-fermé» à perce conique octavie au lieu de quintoyer.

Ne nous reste plus qu'à réécouter «Pierre et le Loup» de Prokofiev.